

NUMERIEKE MODELLEN VOOR LEIBNIZ' BEWERING DAT ELKE MONADE HET UNIVERSUM SPIEGELT OP EIGEN WIJZE

RUSSELS SUGGESTIE

In een kritische boekbespreking uit 1903 ging Bertrand Russell in op Ernst Cassirers reactie op Lotze's bezwaar tegen Leibniz' bewering dat de monaden elk het universum op eigen wijze weerspiegelen.¹ Bij die gelegenheid gaf Russell een uiterst summiere schets van een numeriek model voor Leibniz' ontologie dat naar zijn mening aantoonde dat de weerspiegelingsrelatie tussen monaden, anders dan Lotze en Cassirer meenden, wel degelijk zinvol begrepen kan worden.

Een voorbeeld van de wijze waarop Leibniz het idee van een weerspiegelingsrelatie tussen monaden onder woorden bracht is de volgende passage uit de *Discours de métaphysique* van 1686, één van de weinige meer systematische uiteenzettingen van Leibniz' filosofie die wij kennen.

“9. *That every individual substance expresses the entire universe in its way, and that there are contained in its notion all the things that happen to it, together with all their circumstances and the entire series of external things.* (...) Every substance is like an entire world and like a mirror of God, or of the whole universe, which each one expresses in its own way, very much as one and the same town is variously represented in accordance with different positions of the observer. Thus the universe is in a way multiplied as many times as there are substances, and in the same way the glory of God is redoubled by so many different representations of his work. It can even be said that every substance bears in some way the stamp of the infinite wisdom and omnipotence of God, and imitates him as far as it is able. For it expresses, although confusedly, everything that happens in the universe, past, present and future...”²

Mede in samenhang met andere onderdelen uit Leibniz' ontologie is door verschillende schrijvers, onder wie Lotze, Windelband, Cassirer en Heimsoeth,³ bezwaar aangetekend tegen Leibniz' idee van een uni-

versele spiegelingrelatie. Een karakteristieke formulering van een van de bezwaren is die van H. Lotze uit 1868. Hij redeneerde als volgt. De wezenlijke activiteit van een monade bestaat volgens Leibniz uit waarneming of weerspiegeling van de monaden en van het universum. Maar het universum zelf bestaat enkel uit dergelijke monaden die elkaar weerspiegelen. Derhalve is er geen onafhankelijke inhoud van het universum om weerspiegeld te worden. Het universum volgens Leibniz is één groot spiegelpaleis van spiegels die elkaar weerspiegelen zonder iets anders te weerspiegelen...⁴ Cassirer voegde in 1902 aan dit bezwaar nog toe dat

“the perceptions of a single substance are not of the system of absolute substances. Since this system alone is real, it follows, one must suppose, that all perceptions are wholly mistaken; for what they perceive is unreal, and what is real they do not perceive. Our objects, we are told, are entirely spatio-temporal phenomena, and monads are not objects of either clear or confused perception.”⁵

Op grond van deze overwegingen concludeerde Cassirer dat Leibniz' idee van een universele weerspiegelingsrelatie tussen monaden onhoudbaar is.

In een bespreking van Cassirers werd verzette Russell zich tegen deze conclusie. Hij betoogde dat Leibniz' relatie van ‘uitdrukken’ of ‘weerspiegelen’ anders dient te worden opgevat en voerde een wiskundige analogie of model op.

“One thing expresses another, according to Leibniz, when there is a one-one relation of the parts of the one to those of the other, as e.g. in geometrical projection (...). Now such a relation is possible both between every pair of monads and between every monad and the whole system of monads. To take an illustration from Arithmetic: consider the various series whose general terms are respectively $1-1/n$, $2-1/n$, $3-1/n$, etc., where n is to take successively

¹ Bertrand Russell, ‘Recent Work on the Philosophy of Leibniz’, *Mind* Vol. XII, 1903, pp. 177-201; Ernst Cassirer, *Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen* (Marburg, 1902), p. 468; H. Lotze, *Geschichte der Ästhetik in Deutschland* (München, 1868).

² G.W. Leibniz, ‘Discours de métaphysique’ (jan.-febr. 1686), geciteerd uit: *Philosophical writings*, ed. G.H.R. Parkinson (Everyman, London, 1934-1973). Vgl. *Die philosophischen Schriften von*

G.W. Leibniz, ed. C.I. Gerhardt, vol. IV, pp. 427vv.

³ Voor een korte bespreking van de bezwaren van deze schrijvers, zie Benson Mates, *The philosophy of Leibniz* (Oxford, 1986), pp. 78-80.

⁴ Lotze, *a.w.*, pp. 13-14. Vgl. Russell, *a.w.*, p. 199: “To say that monads mirror the universe is only a figurative expression: there is no absolute object, such as would be required for mirroring.”

⁵ Russell, *t.a.p.*; Ernst Cassirer, *Leibniz' System in seinen wissen-*

all positive integral values. each of these series is similar both to every other series and to the whole series of series. If every term of each series stood for a state of a monad, and each whole series for a whole monad, we should get here a perfectly Leibnizian world, in which monads would all mirror both each other and the universe. Thus Lotze's objection, to which Dr. Cassirer answers by abandoning the notion of mirroring the universe, appears to be based upon an error.⁶

Leibniz stelde dat alleen de monaden en hun toestanden absolute realiteit hebben. Cassirer merkte op dat hieruit volgt dat de dingen die wij zintuiglijk waarnemen niet reëel kunnen zijn; het zijn immers geen monaden of toestanden van monaden die zich manifesteren in de waarneming. Als de waargenomen dingen slechts constructies van het bewustzijn zijn, is ons hele universum (in de normale zin van het woord) dus eigenlijk een illusie. Hoe kan Leibniz dan beweren dat iedere monade het gehele universum weerspiegelt? Slechts iets dat absolute realiteit heeft kan zich in de monaden spiegelen.

Russell legt uit dat Cassirers analyse berust op een onjuiste interpretatie van de wijze waarop monaden het universum spiegelen of uitdrukken. Het is de totaliteit van monaden die door iedere monade wordt uitgedrukt. Er is een uitdrukkingsrelatie waarvan Russell zegt: "One thing expresses another, according to Leibniz, when there is a one-one relation of the parts of the one to those of the other, as e.g. in geometrical projections." en een dergelijke uitdrukkingsrelatie is mogelijk tussen ieder paar monaden onderling en tussen iedere monade en de totaliteit van de monaden (het universum). Russell illustreert dit met het volgende voorbeeld. Representeer monade p met de rekenkundige reeks $p - 1/n$, waarbij n alle positieve gehele getallen doorloopt. Dit geeft de volgende reeksen:

$$\begin{aligned}
 &0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \\
 &1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{3}{4}, 1 - \frac{4}{5}, 1 - \frac{5}{6}, \dots \\
 &2, 2 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{3}{4}, 2 - \frac{4}{5}, 2 - \frac{5}{6}, \dots \\
 &\dots \\
 &i, i - \frac{1}{2}, i - \frac{2}{3}, i - \frac{3}{4}, i - \frac{4}{5}, i - \frac{5}{6}, \dots \\
 &i + 1, i + 1 - \frac{1}{2}, i + 1 - \frac{2}{3}, i + 1 - \frac{3}{4}, i + 1 - \frac{4}{5}, i + 1 - \frac{5}{6}, \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

schaflichen Grundlagen (Marburg, 1902), p. 468.

⁶ Russell, *a.w.*, p. 199.

⁷ Benson Mates, *The Philosophy of Leibniz. Metaphysics and Language* (Oxford 1986), pp. 80vv.

⁸ Er zijn overigens nog tal van andere verschillen tussen de modellen van Russell en Mates. (...)

⁹ Merk op dat alleen de werkelijke wereld uit (werkelijk bestaande) monaden bestaat. Benson Mates wil (anders dan Russell)

Als een reeks een monade representeert en de termen van de reeks de toestanden van de monade, dan ontstaat volgens Russell een perfect model van Leibniz' universum, waarin alle monaden elkaar en het universum spiegelen. Russell merkt op dat: "Each of these series is similar both to every other series and to the whole series of series." Zoals vanuit één willekeurige term de gehele reeks gegenereerd kan worden, zo kunnen ook vanuit een willekeurige term de corresponderende (d.w.z. in n gelijke) termen van de andere reeksen worden gegeven. Maar wat zegt een numerieke representatie van de toestand van een monade? Hoe kan dit als een spiegeling van andere monaden en van de totaliteit van de monaden worden gezien? Russell zegt hier verder niets over, maar de analyse van Benson Mates kan een en ander misschien verhelderen. Van belang is in ieder geval dat, zoals uit de reeksen blijkt, iedere mogelijke toestand van een monade door een uniek *rationaal* getal kan worden gerepresenteerd.

HET MODEL VAN BENSON MATES

In 1986 presenteerde Benson Mates in navolging van Russell een rekenkundig model voor Leibniz' ontologie.⁷ Waar Russell reeksen van rationele getallen gebruikte om monaden en hun afzonderlijke toestanden te representeren, maakt Mates gebruik van *reële* getallen. Anders dan Russell maakt hij bovendien de relatie tussen de toestanden van de monaden en hun numerieke representatie expliciet.⁸ Hij doet dit op de volgende wijze.

Neem aan dat elke monade (of eigenlijk: elk volledig individueel begrip)⁹ kan worden beschouwd als een reeks van toestanden, d.w.z. als een reeks van volledige eigenschappen. Neem bovendien aan dat elke mogelijke toestand van een mogelijk individu kan worden beschouwd als een samengestelde volledige eigenschap, zodanig dat voor alle eenvoudige eigenschappen P ofwel P ofwel niet- P deel van de volledige eigenschap. Aangezien elke monade van moment tot moment door een continue reeks van toestanden gaat, kan zij worden weergegeven als een interval van reële getallen r groter dan of gelijk aan 1. Elke toestand van een monade (anders gezegd: elk moment uit het leven van de monade) correspondeert dan met een

in zijn model uitdrukkelijk ook mogelijke werelden opnemen. Het is daarom eigenlijk verstandiger om niet te spreken over 'monaden' (want niet-werkelijke mogelijke werelden bestaan niet uit monaden, hooguit uit zoiets als 'mogelijke monaden'), maar over volledige individuele begrippen (want mogelijke werelden zijn constellaties van dergelijke begrippen). Benson Mates is in de presentatie van zijn model helaas niet consequent in zijn woordkeus en spreekt heel losjes over individuen en monaden in andere moge-

reëel getal in het interval, dat een continuum van momenten representeert. Op deze wijze kan monade 1 in wereld 1 (de werkelijke wereld) worden gerepresenteerd door het interval $[1; 1 + \frac{1}{2})$, monade 2 in wereld 1 door $[2; 2 + \frac{1}{2})$ en in het algemene geval monade m in wereld 1 door $[m; m + \frac{1}{2})$. Op dezelfde wijze wordt monade 1 in wereld 2 gerepresenteerd door het interval $[1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{3}{4})$, monade 2 in wereld 2 door $[2 + \frac{1}{2}; 2 + \frac{3}{4})$ en monade m in wereld 2 door $[m + \frac{1}{2}; m + \frac{3}{4})$. In het algemene geval wordt monade m in wereld w gerepresenteerd door het interval van reële getallen r waarvoor geldt

$$m + \left(1 - \frac{1}{2^{w-1}}\right) \leq r < m + \left(1 - \frac{1}{2^w}\right)$$

De techniek die Mates gebruikt voor het 'ordenen' van monaden en werelden komt er dus op neer dat het interval voor de m -de monade in de $(w + 1)$ -de wereld telkens de helft is van het nog niet gebruikte interval tussen de bovenste waarde van het m -de interval in de w -de wereld en $(m + 1)$. De verdeling ziet er als volgt uit:

	m	$+1/2$	$+3/4$	$+7/8$	$\dots +1$
$m = 1$					
$m = 2$					
$m = 3$					
$m = 4$					
$m = 5$					
	$w = 1$	$w = 2$	$w = 3, \dots$		

Ieder reëel getal $r \geq 1$ dus staat voor een toestand van een monade in de feitelijke of in een mogelijke wereld. Laten we een voorbeeld nemen. Stel $r = 6,75010\dots$ Dit getal staat voor een unieke reeks volledige eigenschappen, dus ook voor een uniek volledig individueel begrip. Uit de waarde van r kun je per definitie twee dingen meteen aflezen, namelijk het 'nummer' van de wereld w en het 'nummer' van de monade m . Bovenstaande waarde van r geeft aan dat het gaat om monade 6 (bepaald door de waarde voor de komma) in wereld 3 (bepaald door de waarde achter de komma, die in dit geval ligt tussen $\frac{3}{4}$ en $\frac{7}{8}$).

Een volgende vraag is nu hoe je uit een gegeven waarde van r kunt aflezen in welke toestand de desbetreffende monade zich bevindt op een bepaald tijd-

stip? Anders gezegd, hoe lees je uit r de enkelvoudige eigenschappen van de monade af? Mates geeft hiervoor de volgende ingenieuze oplossing.

Bereken uit r de inverse $\frac{1}{r}$ en beschouw van deze inverse de decimale ontwikkeling E_r (de getallen achter de komma, dus). Weergegeven in binaire notatie is E_r een oneindige reeks van nullen en enen. Elk getal uit deze reeks kan nu worden beschouwd als een representatie van een enkelvoudige eigenschap P van een monade op een bepaald tijdstip overeenkomstig de volgende definitie.¹⁰ Noem het i -de getal in de reeks a_i en laat a_i weergeven of een monade de enkelvoudige eigenschap P_i wel of niet bezit, als volgt:

- $a_i = 1$ iff de monade bezit de enkelvoudige eigenschap P_i
- $a_i = 0$ iff de monade bezit het complement van de enkelvoudige eigenschap P_i , d.w.z. $\sim P_i$ (niet- P_i)

Bevat de toestand van een monade bijvoorbeeld de eigenschappen P_1, P_3 en P_5 , maar niet de eigenschappen P_2 en P_4 , dan kan dat worden genoteerd als

$$P_1 \ \& \ \sim P_2 \ \& \ P_3 \ \& \ \sim P_4 \ \& \ P_5 \ \dots$$

hetgeen in de binaire notatie wordt

$$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots$$

Laten we als voorbeeld nemen $r = 5 \frac{9}{11}$. De inverse is dan $\frac{1}{r} = \frac{11}{64}$, d.w.z.

$$\frac{1}{r} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{0}{128} + \frac{0}{256} + \dots$$

ofwel in binaire notatie $\frac{1}{r} = 0.00101100\dots$ De binaire ontwikkeling is dus

$$E_r = 00101100\dots$$

waaruit volgt dat de toestand of samengestelde eigenschap P_r van monade 5 in wereld 3 (ga dit na!) op het desbetreffende moment als volgt is:

$$P_r = \sim P_1, \sim P_2, P_3, \sim P_4, P_5, P_6, \sim P_7, \sim P_8, \dots$$

Hoe bepalen we nu het tijdstip waarop een monade zich in een bepaalde toestand bevindt? De toestanden van twee monaden noemen wij gelijktijdig

lijke werelden. Om de uitleg niet nodeloos te compliceren volg ik hier gemakshalve die losse woordkeus, zij het onder verwijzing naar bovenstaande waarschuwing.

¹⁰ Merk op dat we hier ook de reden zien waarom eerder bepaald werd dat $r \geq 1$. Voor $r = 0$ ontbreekt immers de inverse,

terwijl bij toelating van $r < 0$ of van $0 < r < 1$ de decimale ontwikkeling E_r van de inverse geen unieke reeks oplevert. Bijvoorbeeld is voor elk geheel getal $n > 0$ en $r = \frac{1}{n}$ de reeks E_r hetzelfde en bovendien gelijk aan die van $r = n$, nl. $E_r = 000000\dots$

wanneer hun r -waarden met precies een geheel getal verschillen. Merk op dat deze definitie uitsluit dat twee toestanden van één en dezelfde monade gelijktijdig kunnen zijn. Bovendien wordt uitgesloten dat de toestanden van twee monaden in verschillende werelden gelijktijdig kunnen zijn.

Voor de feitelijke wereld ($w = 1$) nemen we de eerste monade ($m = 1$) als klok en definiëren de tijd t als volgt,

$$t = (r - 1) / (3 - 2r),$$

waarbij we gemakshalve kunnen aannemen dat t de tijd weergeeft in jaren na de schepping. Merk op dat voor $r = 1$, op het moment van de schepping zelf, $t = 0$, terwijl voor $r \rightarrow 1 \frac{1}{2}$, waarbij we ons moeten voorstellen dat de limietwaarde van het interval voor de eerste monade wordt benaderd, de tijd nadert tot oneindig, $t \rightarrow \infty$, vermoedelijk zoiets als een asymptotische nadering tot het einde der tijden.

Bij wijze van voorbeeld kunnen we nu nagaan welke samengestelde volledige eigenschappen de eerste monade bezit na verloop van tijd t sinds de schepping. Monade 1 in wereld 1, met $1 \leq r < 1 \frac{1}{2}$, vertoont het volgende verloop:

t	r	$\frac{1}{r}$	E_r (binair)
0	1	1	000000000...
$\frac{1}{61}$	$1 \frac{1}{63}$	$\frac{63}{64}$	111111000...
$\frac{1}{31}$	$1 \frac{1}{31}$	$\frac{31}{32}$	111110000...
$\frac{1}{13}$	$1 \frac{1}{15}$	$\frac{15}{16}$	111100000...
$\frac{1}{5}$	$1 \frac{1}{7}$	$\frac{7}{8}$	111000000...
1	$1 \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	110000000...
5	$1 \frac{5}{11}$	$\frac{11}{16}$	101100000...
21	$1 \frac{21}{43}$	$\frac{43}{64}$	101011000...
85	$1 \frac{85}{171}$	$\frac{171}{256}$	101010110...

Algemener kunnen we op tijdstip t de r -waarde voor monade m berekenen. Voor de klok ($m = 1$) geldt

$$t = (r - 1) / (3 - 2r)$$

ofwel

$$r = (3t + 1) / (2t + 1) = 1 + t / (2t + 1)$$

waaruit volgt dat voor monade m op tijdstip t geldt

$$r = m + t / (2t + 1)$$

JAN SLEUTELS, NOV. 1998